

数学“是”什么？

Gian-Carlo Rota

基于科学定律作出的准确预言实属罕见，这在科学界是公开的秘密。就在不久前，在 Carnap (卡纳普) 和 Reichenbach (赖兴巴赫)¹⁾ 的神秘时代，还相信预言是科学的基本特征。与这个虚构信念相伴的是荒谬的混淆：把所有科学等同于物理学。在那个粗暴简单化的年代，科学中作出预言的出色实例有：狭义相对论的确认 (confirmation)²⁾，用量子力学给出氢原子谱线的解释，以及来自力学的各种其它重大成果。

50 多年来，哲学家习惯于以此来检验他们的科学哲学，并用以诊断 20 世纪折磨哲学的那些通病。随意地检验物理，化学之外的任何一门科学，无疑可以证明，科学的预见在实证论意义上充其量不过是令人难以消化的笑话。动物学，宇宙学，经济学和进化生物学都只不过稍微触及准确预言。

对排除了标准预设的科学事业作出描述仍然有待未来。在现阶段，我们可以开始移除挡道的障碍，而障碍之一是哲学家和逻辑学家系统地误用语言。常用词语被剥夺了它们在日常词语中所享有的丰富和互相冲突的含义；把每个词束缚住一种固定含义上之后，如实地描述也就随之关上了大门。

我们挑选单词“是 (is)”作为近代哲学遭受梗阻之苦的典型。我们将描述在各种场合下提出“数学是什么？”这个问题时的种种含义。

哲学上的支配性正统说法把“是”的使用等同于把词“是”限制在 Frege (弗雷格)³⁾ 逻辑中的使用。逻辑学在 20 世纪所达到的完美状况是几乎所有数学分支都无法与之相当的。然而(或者正由于此)，逻辑学的推理从此脱离了在现实生活中实际使用的那种推理。在大部分日常情况中，逻辑反倒因其缺失而凸显，这是令人折服的逻辑论证，成为处于困境而无计可施的修辞学者借以脱困的杀手锏。

由此可知，在计算机科学中频繁出现 Frege 逻辑的实质性应用就绝非偶然了。在 1980 年代，那些想用早期的计算机来模拟心智的狂热人士，通过展示其无知的还原论，成功

译自：The Math. Educator, Vol. 9 (1998), No. 1, What “is” Mathematics?, Gian-Carlo Rota. Copyright ©the Mathematics Educator 1998. Reprinted with permission. All rights reserved. 《数学教育者》授予译文出版许可。

作者于 1999 年去世，关于他的工作和思想可参看文集《From Combinatorics to Philosophy, The Legacy of G.-C. Rota》，Springer, 2009.

- 1) Rudolf Carnap (1891–1970) 和 Hans Reichenbach (1891–1953) 都是原籍德国，后移居美国的现代逻辑学家，哲学家。1930 年二人同时主编维也纳学派创办的《认识，哲学年鉴》杂志。Carnap 最终把科学理论本身看作宽泛意义上的分析句子，以致对它的接受就不再是一种认识的决定，而是一种非认识的框架决定。——译注
- 2) 原文如此。——译注
- 3) Friedrich Ludwig Gottlob Frege, 1848–1925, 德国数学家，逻辑学家和哲学家。Frege 逻辑的专业名称是二阶谓词逻辑。Rudolf Carnap 是 Frege 的唯一的注册学生。——译注

地厘清了分隔开逻辑推理与人类言谈之间的鸿沟。

因此认识到逻辑学家所说的词“是”与通常的写作和言谈中词“是”的丰富含义相比，更像是那种 Ayer¹⁾样式的夸张哲学杜撰就不足为怪了。

可能会指责我们“不合逻辑”，对此我们有责任反驳：如实描述是哲学家的最重要使命，而哲学描述的第一步在于承认，现实的很少是理性的，理性的也很少是现实的。理智 (Verstand) 与理性 (Vernunft) 之间如隔深渊。哲学描述必须努力克服不可简约情况的无限繁复花样以及启蒙理性所忽视的矛盾和含糊的结论。

我们的论点是：在“数学是什么？”这个问题中，单词“是”不具有可分类的一组释义。此论点并不意味着单词“是”没有意义，恰好相反，我们在“是”的含义上面临的是“(意义) 太多而难以选择。”

下面列出的是遇到“数学是什么？”这个问题的部分语境，其顺序是刻意安排的，以逐步引向预定的结论。

1. “是”作为词典定义

从字面上看，“数学是什么？”这个问题要求的是数学的一个“定义”。

我们已被训练成把单词“定义 (definition)”的意思局限于它在数学公理系统中定义的作用，以下将不顾及它的这种思想意味，它在通常谈论中与数学定义的关联甚微。

“定义”一词有很多模糊和不清晰的用法，这里将冒昧地罗列，其最常见也是最模糊的，是我们在查词典时所期盼知道的含义。

词典定义是什么？在什么意义下词典“定义”词？

一种有年头的怀疑论认为，词典定义是不可能的，其论证概述如下：假设你要查看词 A 的意思，词典上会用另一些词 B, C 和 D 等来解释。可能会有这样的情况，即用 B, C 和 D 明确地指称的 A 是符合某些条件的唯一词，但这是很难得的。更为常见的情况却是，用 B, C 和 D 对 A 的词典解释可能只是对 A 的意思的模糊近似，读者还要通过各种招数对 A “有所感知”：用 B, C 和 D 所描述的可能是以 A 为其成员的一个集合；或者给出了一系列表示其它“像”A 的东西的类似点和可比拟处；人们可以读到对 A 的意思的各种间接提示，但词典并不能给出 A 的“意思 (the meaning)”。

这个令人沮丧的评论绝不意味着读者在词典上查不到词 A 的意思。读者被期望通过想像来“超越”词典中“指向”A 的含意的各种说法，从而领会到 A 的意思。也只有把眼光从词典的解释移向虽并未给出，但却有“指向”的意义，才能领会 A 的意思。再多的解释也不能保证读者一定能领会到 A 的意思。

这种怀疑性论证因此错误地认为，词典“给”不出定义，除非像情人眼里出西施那样。

上述论证与人们实际查词典的情况形成对照，人们事实上确实在词典上查到单词的意思。假设我们查“jaguar (美洲豹)”这个单词，我们会获得关于美洲豹足够充分的理念，即使我们从未见过或对其一无所知。当我们查“chair (椅子)”这个词，即使在熟悉具体的

1) Sir. Alfred Jules Ayer, 1910-1989, 英国哲学家。1932 年加入维也纳学会，1936 年因出版《语言、真理与逻辑 (Language, Truth, and Logic)》而闻名于世，是逻辑实证主义的代表人物之一，1970 年他被封为爵士。——译注

椅子前，我们尚未领会所“读”到的全部含义，我们也可以获得关于椅子是什么的十分好的概念。

同义词词典是这一现象的进一步佐证。我们通过近似的解释，通过还不能合理说明的过程来学习一个新词的意思。当我们查阅一个已知词的一些同义词时，我们是在寻找此前从未见过的某个词，我们大概猜出该同义词的含义，即便并未给出这些含义，再从中选取一个此前我们从未见过或用过的适当同义词。

从近似的解释并非循理地领会到一个词的含义，是“系词 (copula)”现象，或“A 是 B”中“是”的功能的一个实例。这里的问题在于“是”只对一定的 A 和 B 用作系词，像对“jaguar”和“chair”。而对另一些词则提出了“是”的不同问题，它并不能归入到“是”的系词意义，“数学”就是这样的词。对问题“数学是什么？”的任何一种“数学是...”句式的回答，大概都是推诿的。不可能给出“数学”的明智词典定义。

2. “是”作为邀请

当我们在百科全书而不是在词典上查“数学”一词时，情况有所不同。我们在百科全书上会找到对整个数学领域的综述，还有对各个数学分支的概观以及足够的文献以指导我们学习数学。

百科全书上对“数学”条目的叙述是对问题“数学是什么？”的不同于词典的令人满意的回答吗？显然不是。我们在百科全书上找到的对“数学”的解释，通常会有一段吸引人的开场白，后接一些专业解释和经典论文，从而回避了我们的问题。

词典中的“是”和百科全书中的“是”都出自想用通俗语言来解释只有内行才懂的词汇的这种广泛感到的需求，这种需求大约可追溯到文艺复兴时期，那时编成了第一本（现代意义上的）词典。回顾历史，尤其在中世纪，并未感到有通俗解释的需求。那时的解释（常冠以“定义”之名）是专家圈内的事，与公众无关。“上帝”的经院哲学定义是“完善的存在”¹⁾，意味着只为哲学家和神学家所用。在周日的布道弥撒中这样说可能会被指为异端。

文艺复兴启蒙运动时期把通俗解释作为定义的概念的想法来自一种普世文明的民主理想。这种令人称道的目标并不能使得通俗解释变得更容易。幸运的是，对数学的通俗解释，多半不是提出“数学是什么？”问题的人们所期待的。我们接下去看吧。

3. “是”作为规避

提出“数学是什么？”这个问题的，通常是那些对数学所知甚少，但又想得到一个简单回答而不必费心学点数学的人。

数学门外汉向数学家提出这个问题让数学家不舒服。数学家感觉到问题的粗鲁提法中的不诚实。提问者相信，对这个问题可以像对诸如“红酒洋葱烧牛肉 (boeuf ²⁾ bourguignon) 是什么”，“黄热病是什么？”或“马利 (Magli) 鞋 ³⁾ 是什么？”等问题那样给出回答。

当提问者问“数学是什么？”这个问题时，他并不想费神去学点数学，正相反，他想

1) 原文是拉丁文，分别是“Deus”和“ens perfectissimum”。——译注

2) 原文误为 boef。——校注

3) Bruno Magli 是意大利鞋匠，设计和手工制作高档鞋和配饰。现今 Bruno Magli 鞋已成为制鞋行业的名牌。——校注

以此来摆脱学习数学的要求。他想要的是在自己的谈资中添加点亮色，从而在更多讨论数学时不会感到愧疚。

尽管所有简短回答都有点不诚实，我们并不能因此而推卸给出一个简练回答的责任。非数学家可以在不必研究数学的情况下需要具有一些关于数学“是”什么的想法。他们把自己当作局外人来对待数学，但他们如何对待会影响数学的未来：中小学数学水平的要求必须由专业的教育工作者来决定，必须评估一个单位中雇员的数学水平。最糟的是，数学研究经费的分配也要由那些对研究课题充其量只有匆匆稍微了解的人来确定。数学和所有智力性学科一样，经济上不能自给自足，并且自从文明初启以来，数学家的生存都有赖于社会或少数富人的慷慨。像哲学家和艺术家一样，数学家也是“被包养的”人。作为回报，公众期待数学家的工作成果能使得那些受过教育且对数学偶有兴趣者，或那些负责处理数学家的政治和经济问题的人对此能有所了解。

我们以后再说数学家不能用通俗的语言让大众明白他们的领域是何等的幸，从Pythagoras (毕达哥拉斯) 时代开始就是如此。对“数学是什么？”可能难以给出一个容易理解的简短回答，这种回答也许不诚实和不恰当，但数学家如不能提供此类回答将会是一个代价高昂的错误。

4. “是”作为逃避

面临要学一种数学理论的学生，很少会觉得有必要一开始就提出“数学是什么？”的问题。他们更可能提出像“拓扑学是什么？”，“Riemann (黎曼) 假设是什么？”或“随机变量是什么？”之类明确的问题。

然而借助思想实验 (thought experiment)¹⁾ 的考虑可以设想有学数学的学生仍然提出这个问题，并声称他在认真学习数学之前必须知道这个问题的回答。

教师在听到学生提出这个问题时，多半会投之以怪异的眼光。该教师会有所警觉：这个学生没学过小学数学？这个学生怕学数学？这个学生是不是认为在真正学习数学之前要有某种允诺？这个学生怕数学？这个学生是不是要去看医生？总之，教师不会在这种场合尝试去回答这个问题。最有可能发生的情况是，教师会对这个学生轻声抚慰几句，丝毫不打算对这个问题作任何解释，只是缓解从所提问题中透露出的忧虑。

5. “是”作为总结

有些数学家 (如 Poincar'e (庞加莱), Hadamard (阿达马), Weyl (外尔)) 在他们职业生涯的晚期，感到需要回答“数学是什么？”这个问题作为逐渐淡出数学世界的一种助力，就如同觉得需要写自传那样。在这些情形，问题“数学是什么？”是叙述数学史和数学哲学的一个托词。为回答这个夸张地提出的问题而撰写的文章会论及诸如数学的“本质”，“结构”和“地位”等等。“是”这个单词再次被当作“关于 (about)”而避开，转而讨论起关于当代的数学，关于数学的未来走向，关于数学中各领域之间的关系。

6. “是”作为不可能

通过检验提出“数学是什么？”这个问题的一些语境，我们已经说明了在所考虑的每

1) 指用想象力进行的实验，所做的都是在现实中无法做到 (或现实未做到) 的实验。——校注

种场合都不能对这个问题给出形如“数学是...”那样的回答。在最先讨论的查阅词典的场合，可能会在某本词典中读到形如“数学是...”的回答，但对此不能过于当真。

我们能由此推断对“数学是什么？”这个问题无法给出回答吗？

如果我们对词 X 提出的问题“X 是什么？”不能给出形如“X 是...”的恰当回答，则称词 X 为“前本体论术语”。¹⁾此前的一些例子表明，数学一词是前本体论术语。

大多数常用词都不是前本体论术语。例如，单词“椅子”就不是，因为我们可用形如“椅子是...”的一些句子来回答“椅子是什么？”这个问题。对于大多数需要而言，一组适当的句子可以提供关于椅子的足够好的描述，尽管并没有一组句子可以在逻辑意义上成功地“定义”词“椅子”。我们用“事项 (item)”这个词来记诸如“椅子”，“三角形”，“美洲豹”等词，对这些词 X 所相应的问题“X 是什么？”可能给出“X 是...”的合适 (尽管不一定是合逻辑的) 回答。我们断言，存在前本体论术语，并且前本体论术语不是事项。

哲学文献上有很多前本体论术语：“时间”，“世界 (world)”，“无 (nothing)”是在现象学 (phenomenology) 文献中研究过的 3 个前本体论术语。从 St. Augustine²⁾ 起，就认为问题“时间是什么？”是哲学家回答不了的。问题“‘无’是什么？”显然是难以处理的。在 Heidegger 的著作《存在与时间 (Being and Time)》的第 3 章中，认为“世界”是前本体论术语。

用“A 是 B”型句子组成的语言来描述和定义事项的局限性阻碍我们用以描述——更不用说定义——前本体论术语。这迫使我们在下述二者之间作出抉择：要么当 X 是前本体论术语时，形如“X 是...”的句子没意义；要么词“是”在句中有不同于它在关于事项的语句中作为系词的意义。

第 1 种抉择来自现象学的几位作者合作工作中的一个论点。

“数学”，“时间”，“无”和“世界”等词有些什么“共同”特征使得我们把这些词归类于前本体论术语呢？

在“A 是 B”中，作为系词的“是”预设了赋予其意义的语境。在尚未主题化的背景——通常是默认的——中，A 只能是 B。更正式地说：“A 是 B”中的“是 (is)”预设了一个语境，使得其中的“是 (is)”可以成为“就是 (be)”。例如，“椅子”预设了经常使用椅子的日常生活语境。无一事项可以在没有某种这样的背景语境中有所指明。“是 (to be)”乃“在某个语境中的是 (to be-in-a-context)”。我们在处理和阅读“A 是 B”这个句子时，自以为是在句子本身中找到其意义，而与任何背景语境无关。逻辑准则又助长了“A 是 B”的意思无关语境的假象；在逻辑课本中常用作为例子的陈腐套语，也被小心地去除了语境参照。我们难以想象无语境的句子 (如“雪是白的”) 会用在日常对话中。但是每当“A 是 B”用得有意义，即有语境时，总是突出其未主题化的背景语境。

在“A 是 B”中的“是”据称是用 B 来解释 A。这种解释可能是用语境以及语境间的

1) pre-ontological term, 这是德国哲学家 Martin Heidegger (1889–1976) 在其早期代表作《Being and Time》(1927) 中所用的术语。——译注

2) St. Augustine, 354–430, 古罗马帝国时期基督教思想家，欧洲中世纪基督教神学、教父哲学的重要代表人物。——译注

多层次编织把 A 联系到 B 的意思. 没有这些语境 / 语境间的编织, “A 是 B” 就毫无意义.

“A 是 B” 中的 “是” 有意义, 如果当 A 和 B 都是事项, 即 A 和 B 处于共同语境. 然而当 A 和 B 是前本体论术语时, 陈述 “A 是 B” 就成问题了. 前本体论术语不是事项, 而是事项 “是” 什么的语境的可能性条件. 简言之, 形如 “时间是 …” 的句子都没有意义, 因为 “时间” 不是任何一种实体 (entity), 而是所有实体的一种可能性条件.

然而, 任何 “时间是 …” 的句子不可能有意义这一点, 并不能把我们从理解时间的前本体论现象的问题中解脱出来, 而只是指出, 需要一种有别于事项的语言以适合于探索时间的意义.

没有 “数学” 这个术语的 “定义” 能描述我们称之为数学的特有语境. 数学不是某些语境共享的事项. 数学是数学语境的可能性条件, 我们不可能用 A 和 B 都是事项时的一些 “A 是 B” 型句子来解释数学 “是” 什么, 因为数学 “是” 非物 (no-thing).

当我们试图在语境事项的语言中解释数学 “是” 什么时, 这个词 “是” 被误用了. 诸如 “数学是什么?”, “时间是什么?”, “世界是什么?” 等问题都是误导的. 数学, 时间和世界都不是事项, 因此, 问它们 “是” 什么没有意义.

7. “是” 作为惊奇

我们会得出因为 “数学是什么?” 这个问题没意义而不予理会的结论吗? 这种结论极其类似于实证论者总是把超出他们有限词汇的任何问题当作 “没意义” 而加以清除的诅咒. 此外, 这种结论又把我们拉回到此前自豪地与之疏远的正统哲学.

“数学是什么?” 这个问题并非总像前面有些例子那样以规避的方式提出. 大学生和成熟的数学家有时都会提出这个问题以表达他们的惊奇感, 他们要表示的正是哲学家 Kant (康德) 在其《实践理性批判 (Critique of practical reason)》一书开头所描述的, 当沉思天上星空和人间道德律时会间或支配我们的那种疏远感觉. Aristotle (亚里斯多德) 最先注意到, 这种疏远的惊奇感觉是哲学研究的开端. 问题 “数学是什么?” 可能表达了当沉思令人敬畏的数学大厦时的惊奇感.

问题 “数学是什么?” 有时所表露的惊奇感当然不可能是对这个问题的一个 “回答”. 它将是最终揭示数学的 “可能性条件” 的哲学之旅的开端, 而这种可能性条件的揭示就是对这个问题的 “回答”.

遗憾的是哲学家忽视了给出推理方法的严格表述的任务, 而将这导向揭示可能性条件. 当可能性条件的 “逻辑”, 即哲学, 发展到 Frege 逻辑所确定的严格标准之时, 那么对 “数学是什么?” 这个问题的 “回答”, 将可能会形如 “数学是 …”.

原文后记 Gian-Carlo Rota (1932—1999, 校注) 博士是麻省理工学院的应用数学和哲学教授. 他是在组合学上的重大贡献而名闻数学界的杰出数学家; 他的研究领域包括不变量理论和哑演算 (umbral calculus). 他还撰写了不少类似本文的哲学文章, 它们被收录在近著《不可分的思想 (Indiscrete Thoughts)》(Birkhauser, ISBN 0-8176-3866-0/ISBN 3-7643-3866-0) 中.

(李乔 译 陆柱家 校)